Департамент образования и молодежной политики

Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

Бюджетное учреждение профессионального образования

«Междуреченский агропромышленный колледж»

Составитель: С.В.Илясова

Методическое пособие

 ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

**«ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ»**

для студентов, обучающихся по программЕ СПО

«Механизация сельского хозяйства»

3

Междуреченский, 2019 год

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании методического Совета колледжа (Протокол № «\_\_» \_\_\_\_\_\_\_ 2019 года)

Составитель: С.В.Илясова

Методическое пособие: методическое пособие по дисциплине ЕН.01 математика «предел и непрерывность функций», для студентов, обучающихся по программе СПО «Механизация сельского хозяйства»

© Бюджетное учреждение профессионального образования

«Междуреченский агропромышленный колледж», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА……………………………... | 4 |
| §1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ………………………………............ | 5 |
| §2. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИЙ…….. | 6 |
| §3. НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ………………………………… | 7 |
| §4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ…………………............ | 8 |
| §5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ……………………………………….  | 9 |
| УПРАЖНЕНИЯ..……………………………………………… | 12 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ……………... | 13 |

**Пояснительная записка**

Учебно-методическое пособие содержит теоретические сведения по теме «Предел и непрерывность функций», которые сопровождаются примерами и комментариями, способствующими сформировать верное представление о сути изучаемых понятий.

Целью данного пособия - на основе системы упражнений и примеров развить математическую интуицию и логическое мышление студентов, содействовать воспитанию общематематической культуры, навыкам самостоятельного обучения.

Пособие состоит из пяти параграфов и упражнений. В приложении представлены упражнения для подготовки к контрольной работе по теме «Предел и непрерывность функций» по дисциплине ЕН.01 Математика для студентов, обучающихся по специальностям «Механизация сельского хозяйства», а также и для других групп СПО, где изучаются данные темы.

**§1.Предел функции**

***Определение предела функции.***

Пределом функции ***y=f(x)*** при ***x*** стремящемся к ***a*** называется число ***b***, к которому стремится значение самой функции при ***xa*** и обозначается



Для нахождения пределов функций при х→*а* используются следующие свойства, определённые в теоремах об операциях над пределами:

**Теорема 1.1 о вынесении постоянного множителя за знак предела:**

Если lim х→а f(x) = b, то lim х→*a* k · f(x) = k · b.

**Теорема 1.2 о пределе суммы:**

Если lim х→a f(x) = b, lim х→a g(x) = c, то lim х→a (f(x) + g(x)) = b + c.

**Теорема 1.3 о пределе произведения:**

Если lim х→a f(x) = b, lim х→a g(x) = c, то lim х→af(x) · g(x) = b · c.

**Теорема 1.4 о пределе частного:**

Если lim х→a f(x) = b, lim х→a g(x) = c и c ≠ 0, то lim х→a f(x) / g(x) = b / c.

**Теорема 1.5 о *пределе степенной функции***

limx→*a*[f(x)]p=[limx→*a*f(x)]p,где степень p - действительное число.

В частности, limx→*a*)=.

**Теорема 1.6 о *пределе показательной функции***

limx→*aa*f(x) = ), где основание *a* >0.

**Теорема 1.7 о *пределе логарифмической функции***

limx→*a*[log*a*f(x)]=log*a*[limx→af(x)], где основание a>0.

**Пример 1.1**

Найти предел

Решение: Данный предел вычисляется непосредственным подставлением числа -4 в функцию вместо х, получаем

**Пример 1.2**

Найти предел limx→10(2xlgx3).

Решение: Используем теорему 3.

limx→10(2xlgx3)= limx→10(2x limx→10 lgx3==203=60

**Пример 1.3**

Найти предел limx→9Решение: Используя основные свойства пределов (правило суммы, правило частного и предел степенной функции), получаем

 limx→9= ===81.

Найти предел функции можно не всегда, поскольку он может существовать и не существовать.

**Пример 1.4**

Найти предел

Решение: предел данной функции не существует, т.к. при х, близких к -5, подкоренное значение функции

**§2. Обобщение понятия предела функции**

В определении предела, которое было дано ранее в §1, ***а*** и***b*** – это числа. Обобщим понятие предела на случай, когда ***а*** и***b*** равны . Такую запись нужно понимать как некоторую условность: достичь бесконечности нельзя, к ней какая-либо величина может только стремиться.

***Определение 2.1***

Число ***b*** называется пределом функции ***y=f(x)*** при ***x*,** если для любого числанайдётся такое число , что при всех ***х*** выполняется неравенство .

Пишут **.** (Значения аргумента ***x*** должны быть достаточно велики)

***Определение 2.2***

Число ***b*** называется пределом функции ***y=f(x)*** при ***x*,** если для любого числанайдётся такое число , что при всех ***х*** выполняется неравенство .

Пишут **.** (Значения аргумента ***x*** должны быть отрицательны и достаточно велики по абсолютной величине)

***Определение 2.3***

, если для любого числанайдётся такое число , что при всех ***х***, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство.

***Определение 2.4***

, если для любого числанайдётся такое число , что при всех ***х***, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство.

**Примеры:**

1) ; 2) ; 3) .

**§3. Неопределённости**

При вычислении пределов иногда возникают ситуации когда нельзя высказать никакого общего утверждения о пределе. Он может быть конечным, бесконечным или вовсе не существовать. В таких случаях говорят о неопределённости соответствующего вида. Эти неопределённости необходимо раскрыть.

Рассмотрим неопределённость вида . Для раскрытия данной неопределённости чаще всего используют метод разложения на множители числителя и знаменателя с помощью вынесения общего множителя за скобки, формул сокращённого умножения, разложения квадратного трёхчлена на множители.

**Пример 3.1**

Найти предел

Решение: используем формулу разложения квадратного трёхчлена на множители ()

= =

**Пример 3.2**

Найти предел

Решение: в числителе вынесем за скобку общий множитель *х* и сократим полученную дробь.

Следующая неопределённость вида . Для устранения этой неопределённости достаточно разделить числитель и знаменатель на переменную в некоторой степени, чтобы далее иметь возможность отбросить бесконечно малые слагаемые.

**Пример 3.3**

Найти предел

Решение: числитель и знаменатель разделим на х5 и воспользуемся свойствами пределов и тем, что - бесконечно малая функция при х, т.е. .

= =

Рассмотрим ещё одну неопределённость вида . Такие неопределённости раскрываются путём сведения их к неопределённостям вида и .

**Пример 3.4**

Найти предел – х)

Решение: Числитель и знаменатель умножим на сопряжённое выражение и получим неопределённость .

–х)= .

**§4. Замечательные пределы**

Некоторые пределы в математическом анализе бывают очень полезны, что их называют замечательными.

Один из них называется ***первым замечательным пределом***

**.**

**Пример 4.1**

Найти предел

Решение: Для вычисления такого предела сделаем замену переменной t=2x.

Следующий предел называется вторым замечательным пределом.

 е

Делая замену х=, получаем другую форму записи этой формулы

**Пример 4.2**

Найти предел

Решение: Для вычисления такого предела сделаем замену х=, тогда х

= .

**Пример 4.3**

Найти предел

Решение: Для вычисления такого предела сделаем замену t= -5х.

= .

**§5. Непрерывность**

Пусть функция у = f(x) определена в точке хо и некоторой её окрестности.

***Определение 5.1.***

Функция **у = f(x)** называется ***непрерывной*** в очке хо, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е. .

***Определение 5.2.***

Функция **у = f(x)** называется ***непрерывной*** в очке хо, если её предел при хсуществует и равен значению функции в этой точке, т.е.

.

**Пример 5.1**

Доказать, что функция f(x)=х непрерывна в произвольной точке хо .

Решение: применим определение 5.1., получим

Данная функция является непрерывной в произвольной точке хо .

**Пример 5.2**

Доказать, что функция f(x)=х2 непрерывна в произвольной точке хо .

Решение: Легко видеть, что f()= применим определение 5.1., получим

Данная функция является непрерывной в произвольной точке хо .

Не всегда функция является непрерывной на всей области определения функции.

***Определение 5.3.***

 Когда функция не является непрерывной в некоторой точке , говорят, что в этой точке она ***претерпевает разрыв***. Сама точканазывается при этом ***точкой разрыва***.

Пусть функция у = f(x) определена в некоторой окрестности точки , за исключением, быть может, самой этой точки. f(x) при х слева (х и f(x) при х справа (х . Тогда мы можем столкнуться со следующими случаями.

1. Величины А и В конечны, причём АВ. Тогда говорят, что в точке функция у = f(x) претерпевает ***скачок***.
2. Величины А и В конечны, причём АВ, но в самой точке функция либо не определена, либо её значение не совпадает с А и В. Тогда говорят, что в точке функция у = f(x) имеет ***устранимый разрыв***.
3. или . Тогда говорят, что в точке функция у = f(x) претерпевает ***бесконечный разрыв***.

**Замечание.**

Скачки и устранимые разрывы называются обычно ***разрывами первого рода***, а бесконечные разрывы – ***разрывами второго рода***.

**Пример 5.3**

Функция, заданная правилом у = f(x) = в точке

претерпевает скачок (разрыв первого рода).Рис 5.1.

**Пример 5.4**

Функция f(x) = , в точке не определена, но f(x)4, независимо оттого, как х стремиться к (слева и справа). Значит, в точке данная функция имеет устранимый разрыв.

**Пример 5.5**

Функция f(x) = , в точке имеет разрыв второго рода, поскольку f(x), когда х3 слева, и f(x), когда х3 справа. Рис.5.2.

3

1

1

0

20

 Рис 5.1 Рис 5.2

***Свойства непрерывных функций*** определены следующей теоремой.

***Теорема 5.1 об арифметических операциях с непрерывными функциями:***

Если функции f1(x) и f2(x) непрерывны в точке хо, тогда в этой точке непрерывны также сумма f1(x) + f2(x), разность f1(x) - f2(x), произведение f1(x) f2(x) и отношение f1(x)/ f2(x) (если f2(x) в некоторой окрестности точки хо) этих функций.

К категории основных ***элементарных функций*** обычно относят следующие функции, которые изучаются в школьном курсе математического анализа.

1. Степенная функция у = *ха.*
2. Показательная функция у = *ах.*
3. Логарифмическая функция у = *logaх.*
4. Тригонометрические функции *у = , у = , у = у=.*
5. Обратные тригонометрические функции *у = , у = , у = у=/*

Все эти функции непрерывны на всей области определения.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти пределы функций.

1.. (25x-x2+3). 2.

3. . 4. .

5. . 6. .

7. . 8. .

9. . 10. .

11. . 12. .

13. 14.

15. . 16. .

17. . 18. .

19. . 20. .

Доказать непрерывность функции.

1. у= для всех х.

2. у=3х2+2х+1 в точке х=1.

3. у=х2+3х+3 для всех х.

4. у=х2+3х+3 для всех х

Определить точку разрыва функции и вид (характер) точки разрыва.

1. у= . 2. у= . 3. у= .

ЛИТЕРАТУРА

1. Задачник по высшей математике: Учеб. Пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш.шк., 2000. – 304 с.: ил.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть I. - М.: Наука; Физматлит, 2005. 648 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. – М.: Наука; Физматлит, 2002. 464 с.
4. Элементарное введение в высшую математику: учебное пособие /В.В.Колесов, М.Н.Романов. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. -476 с.: ил. – (Высше образование).
5. <https://function-x.ru/function_discontinuity.html>
6. <https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=manepr>
7. <https://mathminsk.com/sample/03.aspx>